Repères chronologiques en mécanique du solide

XVI^e siècle

- 1543 : COPERNIC affirme que la Terre tourne autour du Soleil.
- 1590 : GALILÉE affirme qu'en l'absence de forces un mouvement est rectiligne uniforme et relie force et accélération ; il applique ces idées à la chute des corps et au pendule.

XVII^e siècle

- 1610 : KEPLER exploite de manière quantitative les mesures réalisées par TYCHO BRAHÉ trente ans plus tôt, découvre le caractère elliptique des trajectoires et énonce les lois qui régissent les mouvements des planètes.
- 1657 : HUYGENS introduit le concept de force centrifuge, puis celui de moment d'inertie ; il perfectionne les horloges.
- 1687 : NEWTON met en place le calcul infinitésimal et énonce les lois de la mécanique classique dite aussi à juste titre newtonienne (principe d'inertie, relation entre masse, force et accélération, principe des actions réciproques, loi de la gravitation universelle) ; les mêmes lois interprètent désormais la chute des corps et les lois de KEPLER du mouvement des planètes.
- 1688 : VARIGNON publie son "projet d'une nouvelle mécanique" ; il y développe notamment la cinématique.

XVIII^e siècle.

- 1781 : COULOMB énonce les lois du frottement de glissement.
- 1788 : LAGRANGE publie sa "théorie analytique de la mécanique"
- 1799 : LAPLACE met en oeuvre dans sa "mécanique céleste" les lois de la mécanique pour décrire le mouvement des planètes.

XIX^e siècle

- 1828 : CORIOLIS introduit les forces d'inertie "complémentaires" qui portent son nom.
- 1846 : Une planète supplémentaire dont l'existence avait été prévue par LE VERRIER au vu des irrégularités du mouvement d'Uranus est observée effectivement. Les lois de la mécanique semblent à même de prévoir l'évolution de n'importe quel système ; c'est le triomphe du déterminisme.
- 1851 : FOUCAULT mesure la vitesse de rotation de la Terre en observant la précession du plan d'oscillation d'un pendule.

XX^e siècle

- 1905 : EINSTEIN fonde la théorie de la relativité restreinte qui affirme notamment l'impossibilité de propager une information à une vitesse supérieure à c_0 et donc l'impossibilité de décider de la simultanéité d'événements se produisant en des lieux différents ; il remet ainsi en cause le fondement de la cinématique classique. Puis en 1916, dans sa théorie de la relativité générale, il renonce au concept de force gravitationnelle et fait apparaître l'interaction gravitationnelle comme une modification de la structure de l'espace-temps engendrée par la présence de la masse énergie.
- 1910 : POINCARÉ étudie le problème à N corps en attraction gravitationnelle, ouvrant ainsi la voie à la théorie du chaos déterministe qui se développera rapidement à partir de 1960 grâce notamment à la puissance des outils informatiques.
- 1920 : HEISENBERG, SCHRÖDINGER, DIRAC, DE BROGLIE, BOHR, PAULI... fondent la mécanique quantique qui affirme notamment l'impossibilité de mesurer parfaitement et simultanément la position et la quantité de mouvement d'une particule.

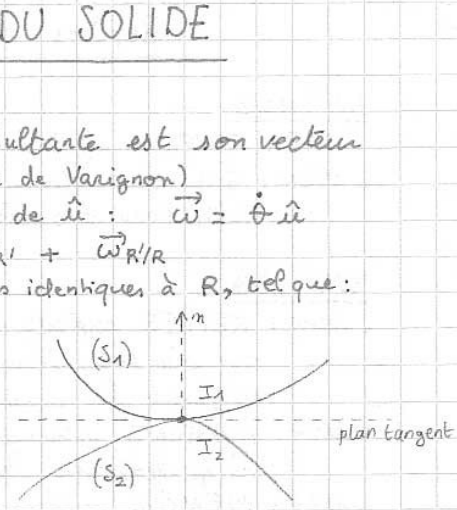
ELEMENTS DE CINEMATIQUE ET CINETIQUE DU SOLIDE

Rappels de cinématique du solide

- Le champ de vitesse d'un solide est un torseur dont la résultante est son vecteur rotation-instantanée. $\boxed{\vec{V}(M) = \vec{V}(A) + \vec{\omega} \wedge \vec{AM}}$ (Formule de Varignon)

Solide en translation : $\vec{\omega} = \vec{0}$; Solide en rotation autour de $\hat{u}$: $\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{u}$

- Pour un changement de référentiel $R \to R'$ on a $\vec{\omega}_R = \vec{\omega}_{R'} + \vec{\omega}_{R'/R}$
- Référentiel barycentrique : de centre G le centre de masse, d'axes identiques à R, tel que : $\boxed{\vec{\omega}_{R^*/R} = \vec{0}}$ et $\boxed{\vec{v}_G^* = \vec{0}}$



- Vitesse de glissement en un point de contact I (où I_1 et I_2 coïncident) : vitesse de I_1 par rapport au référentiel de (S_2)
- Vitesse angulaire de pivotement : projection du vecteur rotation relatif sur la normale au plan tangent : $\vec{\omega}_n(S_1/S_2)$
- Vitesse angulaire de roulement : projection du vecteur rotation relatif sur le plan tangent : $\vec{\omega}_T(S_1/S_2)$

→ La condition de roulement sans glissement introduit une liaison entre les paramètres du mvmt.

Eléments cinétiques d'un système fermé

Il s'agit de grandeurs associant le champ de vitesse $\vec{v}$ à la répartition des masses dm.
Cette répartition peut être discrète (m_i), linéique ($dm = \lambda dl$), surfacique ($dm = \sigma dS$), vol. ($dm = \mu d\tau$)

- Le centre d'inertie est le point G tel que : $\boxed{m\vec{OG} = \iiint_{(\Sigma)} dm\, \vec{OM}}$
- Composition des accélération : $\vec{a} = \vec{a}^* + \vec{a}_e + \vec{a}_c$ avec $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_G^* = \vec{0}$ (Coriolis)
- Quantité de mouvement : (résultante cinétique) $\boxed{\vec{P} = \iiint_{(\Sigma)} dm\, \vec{v}}$; $\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}}$
- Moment cinétique : $\boxed{\vec{L} = \iiint_{(\Sigma)} dm\, \vec{AM} \wedge \vec{v}} = \vec{AM} \wedge \vec{P}$

Le champ des moments cinétiques est un torseur cinétique de résultante $\vec{P}$: $\vec{L}_{A'} = \vec{L}_A + \vec{P} \wedge \vec{AA'}$
Dans un référentiel barycentrique, $\vec{L}^*$ est intrinsèque au système (indépendant du point considéré).

- Théorème de Koenig : $\boxed{\vec{L}_A = \vec{L}^* + m\vec{AG} \wedge \vec{v}_G}$ et $\boxed{E_c = E_c^* + \frac{1}{2} m v_G^2}$
- Moment dynamique : (d'une force) $\boxed{\vec{D} = \iiint_{(\Sigma)} dm\, \vec{AM} \wedge \vec{a}}$ $\boxed{\vec{D} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$

Elements cinétiques d'un solide

- Solide en rotation autour d'un axe Δ : moment d'inertie : $\boxed{J_\Delta = \iiint_{(S)} r^2 dm}$

moment cinétique /Δ : $\boxed{L_\Delta = J_\Delta \omega}$
Energie cinétique de la forme : $\boxed{E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2}$

DYNAMIQUE DES SYSTEMES MATÉRIELS FERMÉS

Torseur des forces

- Résultante de forces : $\boxed{\vec{R} = \iiint_{(\Sigma)} d\vec{F}}$ • Moment de forces : $\boxed{\vec{\mathcal{M}} = \iiint_{(\Sigma)} \vec{AM} \wedge d\vec{F}}$

- Le champ des moments est un torseur dont la résultante est la résultante des forces :
$$\vec{\mathcal{M}}_{A'} = \vec{\mathcal{M}}_A + \vec{R} \wedge \vec{AA'}$$

- Un couple est un système de forces dont la résultante est nulle.

Un glisseur est un système de forces tel qu'il existe un point B où le moment $\vec{\mathcal{M}}_B = \vec{0}$

Le poids est par exemple un glisseur $m\vec{g}$ appliqué au centre d'inertie G.

- Moment du glisseur par rapport à Δ perpendiculaire : $\mathcal{M}_\Delta = \overline{AH}\,\|\vec{F}\|$ ou $\overline{AH}$: bras de levier.
- Lois de Coulomb : non-glissement si $\boxed{\|\vec{f}\| \leq \mu_s \|\vec{N}\|}$

Frottement dynamique en glissement si $\boxed{\|\vec{f}\| = \mu_d \|\vec{N}\|}$

- Les actions de contact entre deux solides articulés par une liaison rotule parfaite de centre O forment un glisseur en O.

Théorèmes généraux de la dynamique des systèmes fermés

- Loi de Newton : $\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$ • Principe des actions réciproques : $\boxed{\vec{R}_{2\to1} = \vec{R}_{1\to2}}$
- Théorème du centre d'inertie (TRD) : $\boxed{\vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G}$ et $\boxed{\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$
- Théorème du moment dynamique : $\boxed{\vec{D}_A = \vec{\mathcal{M}}_{ext,A}}$ (TMD)
- Théorème du moment cinétique barycentrique : $\boxed{\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{ext,G}}$ (TMC*)
- Théorème du moment cinétique scalaire pour un solide en rotation autour d'un axe fixe :
$$J_\Delta \ddot{\theta} = J_\Delta \dot{\omega} = \mathcal{M}_{ext,\Delta}$$

Méthode de résolution d'un problème en mécanique des systèmes de solides

- Analyse cinématique : nécessaire pour déterminer le nombre de paramètres cinématiques bruts p et le nombre de relations q entre eux, soit (p−q) paramètres indépendants ou nb d'équations scalaires nécessaires à la détermination du mouvement → voir à $t=0$ mais aussi après !
- Analyse dynamique : bilan des forces extérieures, en tenant compte d'éventuelles simplifications (pas de frottements, liaisons parfaites) pour éliminer les termes de liaison inconnus.
- Réflexion sur les théorèmes à utiliser : confronter les résultats des analyses cinématique et dynamique et sélectionner les équations en nombre satisfaisant : exploitation des théorèmes généraux, lois de Coulomb pour glissements, référentiel du centre d'inertie.

Attention, les théorèmes du moment cinétique ou de forces ne peuvent donner plus de 6 équations scalaires (et elles restent inchangées par translation)

Si systèmes complexes, on peut appliquer les théorèmes généraux à des sous-système (ex : roue pour une bicyclette) afin d'obtenir d'autres équations nouvelles.

- Approximation des systèmes sans inertie : on peut parfois négliger la masse dm d'un sous-système devant le système entier de sorte que $m=0$, $\vec{P} = \vec{0}$ et $\vec{L}^* = \vec{0}$

et alors $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$ et $\vec{\mathcal{M}}_{ext,G} = \vec{0}$ pour ce sous-système.

PUISSANCE — TRAVAIL — ENERGIE

Puissance et travail

- Puissance d'un champ de forces : $\boxed{\mathcal{P} = \iiint_{(\Sigma)} d\vec{F} \cdot \vec{v}}$

Champ de forces :
moteur si $\mathcal{P} > 0$
résistant si $\mathcal{P} < 0$.

- Travail : $\boxed{W_{1\to 2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P} dt}$
- Cas du poids : $\mathcal{P} = m\vec{g} \cdot \vec{v_G}$ et $W_{1\to 2} = mg(z_1 - z_2)$
- Un champ de forces dérive d'une énergie potentielle E_p si $\boxed{\delta W = -dE_p}$.

Expressions de E_p : mgz_G (poids), $\frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2$ (ressort), $\frac{1}{2}C(\theta-\theta_0)^2$ (fil de torsion), etc.
(variées ...)

- Puissance d'un champ de forces appliqué à un solide :

$$\boxed{\mathcal{P} = \vec{R} \cdot \vec{v_A} + \vec{\mathcal{M}_A} \cdot \vec{\omega}}$$ (si translation simple, $\vec{\omega} = \vec{0}$ ...)

Pour un solide en rotation / Δ : $\mathcal{P} = \mathcal{M}_\Delta \omega = \mathcal{M}_\Delta \dot{\theta} \iff \delta W = \mathcal{M}_\Delta d\theta$

Pour un glisseur $\vec{F}$ appliqué à un point A : $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v_A}$

Pour les forces intérieures : $\vec{F}_{int} = \vec{0}$ et $\vec{\mathcal{M}}_{A,int} = \vec{0} \implies \mathcal{P}_{int} = 0$.

Pour une liaison surfacique $(1 \leftrightarrow 2)$ parfaite : $\mathcal{P}_{1\to 2} + \mathcal{P}_{2\to 1} = 0$

Pour un contact entre deux solides avec frottement et glissement : $\mathcal{P}_{1\to 2} + \mathcal{P}_{2\to 1} = \vec{T}_{2\to 1} \cdot \vec{v_g}_I \leq 0$

Théorème de l'énergie cinétique

- Théorème de la puissance cinétique : $\boxed{\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{INT}}$
- Théorème de l'énergie cinétique (TEC) : $\boxed{E_c2 - E_c1 = W_{ext} + W_{INT}}$

La variation de l'énergie cinétique d'un système fermé (Σ) en mouvement dans un référentiel galiléen entre deux instants t_1 et t_2 est égale à la somme du travail des forces extérieures <u>et</u> du travail des forces intérieures.

Energie mécanique

On la definit par : $\boxed{E = E_c + E_p = E_c + \sum_i E_{pi}}$

Si dans un référentiel galiléen, toutes les forces extérieures et intérieures au système (Σ) dérivent d'une énergie potentielle ou ont une puissance nulle, alors l'énergie mécanique du système est une constante du mouvement.

- Les forces intérieures de frottement convertissent de l'énergie mécanique en énergie interne → lien avec la thermodynamique.

Intérêt pratique

- le TEC est utile pour effectuer un bilan énergétique, mais souvent utilisé pour déterminer le mouvement d'un système. Son inconvénient est de ne fournir qu'une seule équation scalaire, et on ne peut l'exploiter que si toutes les puissances sont calculables. (Interessant en cas d'annulation de puissance des actions de contact : liaisons surfaciques parfaites, liaisons ponctuelle sans frottements ou sans glissement ...)
- L'équation de l'énergie mécanique $E = cst$ constitue une intégrale première du mouvement. Elle se prête à des discussions qualitatives (mouvement borné, périodique, etc.) très efficaces si le système possède un seul degré de liberté.
- Le TEC est redondant par rapport aux théorèmes généraux, mais peut conduire à une solution plus rapide dans les problèmes à un seul degré de liberté cinématique indépendant.