

Repères chronologiques en mécanique des FluidesAntiquité

- -250: ARCHIMÈDE découvre la poussée exercée par un fluide sur un corps totalement immergé.

XVII<sup>e</sup> siècle

- 1644: TORRICELLI expérimente sur la pesanteur dans les fluides et invente le baromètre à mercure.
- 1647: PASCAL expérimente sur la statique des fluides.

XVIII<sup>e</sup> siècle

- 1732: PITOT invente son tube et l'utilise pour mesurer la vitesse de la Seine. La mesure de la vitesse des avions fera du tube de PITOT une nouvelle jeunesse à partir de 1910.
- 1738: BERNOULLI relie la pression et la vitesse dans les écoulements stationnaires de fluides dans le champ de pesanteur et énonce ainsi son "théorème".
- 1753: EULER écrit les équations locales de la mécanique des fluides et démontre le "théorème" de BERNOULLI.
- 1768: D'ALEMBERT établit qu'un corps solide en mouvement rectiligne uniforme dans un fluide ne subit aucune force, ce qui est contraire à l'expérience (paradoxe de D'Alembert). On sait aujourd'hui que ses hypothèses revenaient à négliger la viscosité.
- 1783: Les frères MONTGOLFIER réalisent le premier vol en montgolfière.
- 1788: LAGRANGE introduit le potentiel des vitesses et propose une nouvelle approche de la mécanique des fluides où on suit une particule de fluide donnée.

XIX<sup>e</sup> siècle

- 1822: NAVIER écrit les équations de la dynamique des fluides visqueux: son travail sera retrouvé indépendamment et approfondi par STOKES en 1845.
- 1844: POISEUILLE étudie les lois des écoulements visqueux dans une conduite cylindrique.
- 1860: HELMHOLTZ introduit le concept d'écoulement tourbillonnaire et étudie l'évolution du vecteur-tourbillon.
- 1887: MACH étudie les écoulements supersoniques et fait apparaître le rôle du nombre  $M = v/c$  qui porte aujourd'hui son nom.
- 1893: REYNOLDS étudie la bifurcation laminaire-turbulent dans un écoulement d'eau dans un tuyau et introduit le nombre  $Re$  qui porte son nom.
- 1893: DE LAVAL met au point sa tuyère convergente-divergente, ouvrant ainsi la voie à l'étude expérimentale des écoulements supersoniques en soufflerie.

XX<sup>e</sup> siècle

- 1903: Les frères WRIGHT réussissent le premier véritable vol en avion.
- 1903: TSIOLKOVSKY élabore le principe d'un moteur à réaction utilisant la combustion du dihydrogène dans le dioxygène.
- 1904: PRANDTL montre que la viscosité se concentre dans une couche limite pour les écoulements à grands nombres de REYNOLDS.
- Depuis: YEAGER réussit le premier vol supersonique en 1947. On lance le premier satellite artificiel (Sputnik) en 1957. GAGARINE réussit le premier vol spatial embarqué en 1961 et ARMSTRONG marche sur la Lune en 1969. À partir de 1960, les recherches sur la turbulence sont relancées en liaison avec les développements de la théorie du chaos déterministe.

## CINEMATIQUE DES FLUIDES

### Champ des vitesses dans un fluide

- Méthode Lagrangienne : chaque observateur s'intéresse à une même particule de fluide à un instant  $t \geq t_0 \Rightarrow$  système d'étude fermé, permet d'appliquer directement les principes de la mécanique
- Méthode eulérienne : chaque observateur s'intéresse à un même point de l'espace à un instant  $t \geq t_0 \Rightarrow$  compatible avec les éventuelles contraintes locales imposées aux champs.
- Dérivée partielle de la masse volumique :  $\frac{D\rho}{Dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\rho(M+dM, t+dt) - \rho(M, t)}{dt} = \vec{v} \cdot \text{grad} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t}$

Écoulement stationnaire si  $\partial \rho / \partial t = 0$  ; Écoulement incompressible si  $D\rho / Dt = 0$

- Dérivée partielle du champ de vitesses :  $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) + \text{rot} \vec{v} \wedge \vec{v}$
- Signification physique de  $\text{div} \vec{v}$  :  $\text{div} \vec{v} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt}$

La divergence du champ de vitesses est le taux de variation relative du volume de la particule qui passe en M.

- Signification physique de  $\text{rot} \vec{v}$  :  $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v}$  (vecteur-tourbillon).

Le vecteur-tourbillon décrit la rotation locale des particules de fluide.

Un écoulement est tourbillonnaire si le vecteur-tourbillon n'est pas identiquement nul. Sinon, l'écoulement est irrotationnel (potentiel) : il existe  $\phi$  tel que  $\vec{v} = \text{grad} \phi$ .

### Equation locale de conservation de la masse et conséquences

- Débit volumique à travers  $d\vec{S}$  :  $D_v = \frac{dV}{dt} = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$  (flux de  $\vec{v}$ )
- Débit massique à travers  $d\vec{S}$  :  $D_m = \frac{dm}{dt} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$  (flux de  $\vec{j} = \rho \vec{v}$  densité de courant)

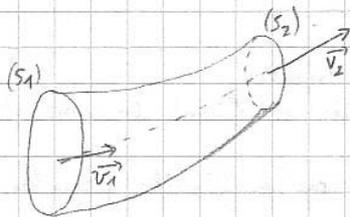
- En tout point d'un obstacle fixe et imperméable, la composante normale de  $\vec{v}$  doit s'annuler. A la surface d'un obstacle imperméable déformable, la composante normale de  $\vec{v}$  (fluide) doit être confondu avec la composante normale de  $\vec{v}$  du point lié à l'obstacle.

- Equation locale de conservation de la masse :  $\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Ainsi pour un écoulement stationnaire ( $\partial \rho / \partial t = 0$ ),  $\vec{j}$  est à flux conservatif ( $\text{div} \vec{j} = 0$ ).

Pour un écoulement incompressible ( $D\rho / Dt = 0$ ),  $\vec{v}$  est à flux conservatif ( $\text{div} \vec{v} = 0$ ).

- loi des branches : le débit volumique se conserve dans un tube de champ (canalisation).
- loi des nœuds : le débit volumique convergent vers un nœuds est nul.

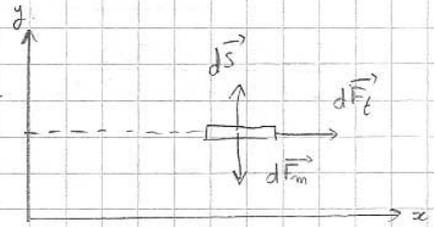


- lorsque les lignes de champ d'un écoulement incompressible se resserrent, la norme du vecteur-vitesse augmente.

## NOTIONS SUR LA VISCOSITE

### Approche mésoscopique de la viscosité

Les actions de contact exercées par le fluide  $z >$  sur celui  $z <$  se décomposent en:  $d\vec{F}_n = -P_M d\vec{S}$  et  $d\vec{F}_t = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} dS \hat{z}$ .



$\eta$  est le coefficient de viscosité ( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$  au Poiseuille PL)

(Ordres de grandeur: Eau  $10^{-3}$  PL, Air  $10^{-5}$  PL, glycérine 1,4 PL)

La force de viscosité  $d\vec{F}_t$  tend à homogénéiser les vitesses locales d'écoulement  $\Rightarrow$  phénomène diffusif.

• Force volumique de viscosité:

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \eta \Delta \vec{v}$$

(pour un écoulement incompressible)

• Equation de Navier-Stokes

$$\mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\text{grad } P + \eta \Delta \vec{v} + \frac{d\vec{F}}{dt}$$

$\eta \Delta \vec{v}$  décrit un transport diffusif de quantité de mouvement

• Nombre de Reynolds:

$$Re = \frac{\mu v L}{\eta} = \frac{v L}{\nu}$$

(avec  $\nu = \frac{\eta}{\mu}$  viscosité cinématique)

Dans un écoulement dont le nombre de Reynolds est grand devant 1, le transport convectif (terme  $-(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$ ) de quantité de mouvement est beaucoup plus efficace que le transport diffusif.

### Interprétation microscopique de la viscosité dans les gaz

• Loi phénoménologique de pression et de viscosité

$$P = \frac{1}{3} m n^* v^{*2}$$

$$\eta = \frac{1}{3} m n^* l^* v^*$$

$$\nu = \frac{\eta}{\mu} = \frac{1}{3} l^* v^*$$

$v^*$ : vitesse quadratique moyenne  
 $l^*$ : libre parcours moyen

### Traînée d'un solide dans un fluide

Pour un objet en mouvement rectiligne uniforme de vitesse  $\vec{v}$  dans un fluide, de dimension caractéristique  $L$  et de section droite d'air  $S$ :

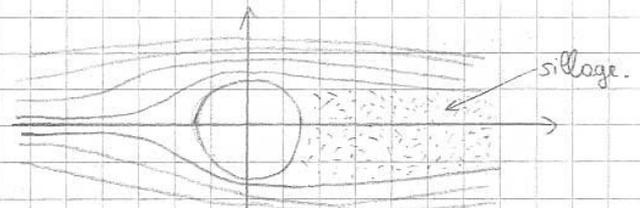
- si  $Re < 1$ , traînée linéaire en  $v$ :  $F = \alpha L \eta v$

- si  $Re > 10^3$ , traînée quadratique en  $v$ :  $F = C \mu S v^2$

$\alpha$  coefficient de traînée  
 $C$  de l'ordre de l'unité

• Ecoulement turbulent: quand les particules traceuses d'un sillage ne peuvent reconstituer les lignes de champ (cas où  $Re > 10^3$ , automobile dans l'air pur ex.)

• Ecoulement laminaire: quand les particules traceuses reconstituent des lignes de champ régulières dans tout l'espace (cas où  $Re < 1$ , contribution de la viscosité)



### Notion d'écoulement parfait et de couche limite

• Un écoulement est parfait si tous les phénomènes de transport diffusifs sont négligeables, c'est-à-dire si toutes les particules de fluide évoluent de manière isentropique.

• Un obstacle fixe impose la nullité du champ de  $\vec{v}$  à sa surface. Les expressions des actions de contact mésoscopiques décrivent les interactions fluide-fluide, mais aussi les interactions fluide-paroi.

• Dans le modèle de l'écoulement parfait, la condition aux limites imposée par un obstacle fixe se réduit à la nullité de la composante normale de la vitesse sur l'obstacle.

Au voisinage des obstacles, là où les gradients de  $\vec{v}$  sont importants, il existe une "couche limite" au-delà de laquelle l'écoulement peut être considéré comme parfait.

## EQUATIONS D'EULER ET DE BERNOULLI

### Equation d'Euler

- Référentiel galiléen :  $\mu \vec{a} = \mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = \mu \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad } P + \frac{d\vec{F}}{dt}$
- Référentiel non-galiléen : il faut également tenir compte des forces d'inertie  $d\vec{F}_{ie}$  et  $d\vec{F}_{ic}$   
 $\mu \vec{a} = \mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\text{grad } P + \frac{d\vec{F}}{dt} - 2\mu \vec{\Omega} \wedge \vec{v} - \mu \vec{a}_c$

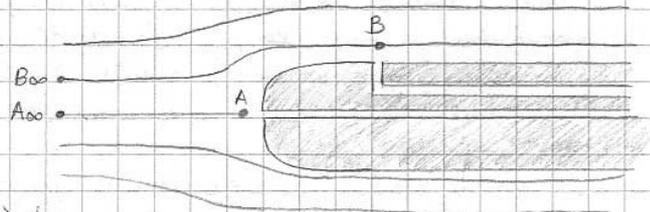
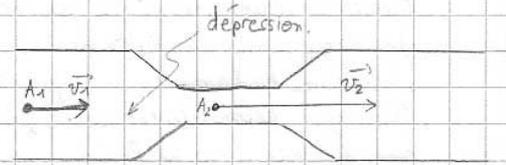
Equation non-linéaire à cause de l'accélération convective  $\Rightarrow$  approximations le plus souvent. Elle permet de déterminer les quatre champs  $P(M,t)$  et  $\vec{v}(M,t)$   $x, y, z$  pour les écoulements incompressibles homogènes ( $\text{div } \vec{v} = 0$ ). Si écoulement compressible,  $\mu(M,t)$  est un nouveau champ scalaire inconnu : on utilise ensuite l'équation locale de conservation de la masse, et une caractérisation thermodynamique de type  $\mu = f(P)$ , de l'évolution isentropique des particules de fluide.

### Théorèmes de Bernoulli

- Ecoulement parfait, stationnaire, irrotationnel, incompressible et homogène :  
 $\frac{P}{\mu} + gz + \frac{v^2}{2} = C$  (Intégrale première de l'équation d'Euler, valable dans tout le fluide).
- Ecoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène.  
 $\frac{P_B}{\mu} + gz_B + \frac{v_B^2}{2} = \frac{P_A}{\mu} + gz_A + \frac{v_A^2}{2}$  (valable pour tous les points d'une même ligne de courant).
- Généralisation aux écoulements parfaits, stationnaires et compressibles.  
 $\int_A^B \frac{dP}{\mu} + \frac{1}{2} v_B^2 + gz_B - \frac{1}{2} v_A^2 - gz_A = 0$  (A et B sont quelconques pour un écoulement irrotationnel et  $\vec{\omega}$  m ligne de courant pr. tourbill.).
- Généralisation aux écoulements parfaits, instationnaires, irrotationnels, incompressibles et homogènes.  
 $\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\mu} + gz = f(t)$  { avec  $\phi$  potentiel de  $\vec{v}$ .

### Quelques applications des théorèmes de Bernoulli

- Phénomène de Venturi : c'est l'apparition d'une zone de dépression au voisinage d'un étranglement des lignes de champs, là où la vitesse augmente.  
 (A la sortie, la pression ne remonte pas tout-à-fait à son niveau d'entrée  $\Rightarrow$  influence de la viscosité sur l'étranglement.)  
 Application : trompe à eau pour faire le vide (mais limité par l'ébullition de l'eau pour  $P < 2500 \text{ Pa}$ ).
- Tube de Pitot : utilisé en aérodynamique pour mesurer la vitesse d'un écoulement d'air uniforme et stationnaire : prise des pressions axiale  $P_A$  et latérale  $P_B$  qui dépendent des pressions et/ou vitesse  $P_{00}, \vec{v}_{00}$  loin du tube.
- Portance des avions : l'aile d'un avion, dans le modèle de l'écoulement parfait, est soumise à des forces de pression qui se compensent (angles d'attaque symétriques)  $\Rightarrow$  paradoxe de d'Alembert. En réalité, il existe un vortex d'intensité  $\Gamma > 0$  assurant la portance de l'aile (force liée au coefficient de portance  $C_z$ ).



# BILANS MACROSCOPIQUE

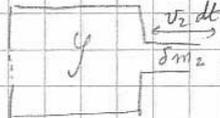
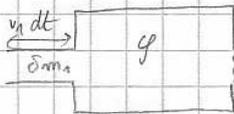
## Les deux méthodes de bilan

• Pour un système ouvert et fixe : méthode eulérienne



On comptabilise la masse entrante  $\delta m_1 = \rho_1 (S_1 v_1 dt)$  et la masse sortante  $\delta m_2 = \rho_2 (S_2 v_2 dt)$  dans le système ouvert fixe  $G$ .

• Pour un système fermé et déformable : méthode lagrangienne



On considère l'évolution du système fermé  $G^*$  tel que :

$$(G^*)_t = (G)_t + \delta m_1$$

$$(G^*)_{t+dt} = (G)_{t+dt} + \delta m_2$$

• Le bilan d'une grandeur extensive  $G$  est donné :

en point de vue eulérien par  $G(t+dt) - G(t) = \text{"cause de variation"} + \delta G_e$

en point de vue lagrangien par  $G^*(t+dt) - G^*(t) = \text{"cause de variation"}$

## Dérivée particulière et formulation des bilans pour les systèmes fermés.

• Dérivée particulière d'une grandeur extensive :

$$\frac{DG}{Dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{G(t+dt) - G(t)}{dt}$$

• Forme des lois de la mécanique et de la thermodynamique

Loi	$G$	Loi écrite sous forme d'un bilan de $G$	Cause de variation de $G$
CM	masse	$\frac{DM}{Dt} = 0$	pas de cause
TRD	quantité de mouvement	$\frac{D\vec{\pi}}{Dt} = \vec{F}_{ext}$	Forces extérieures
TMC	moment cinétique	$\frac{D\vec{\Pi}(A)}{Dt} = \vec{M}_{ext}(A)$	moment des forces extérieures
TEC	énergie cinétique	$\frac{DE_c}{Dt} = P_{ext} + P_{int}$	travaux des forces extérieures et intérieures
1er pr	énergie interne	$\frac{DE_c + DU}{Dt} = \frac{\delta W_{ext}}{dt} + \frac{\delta Q_{ext}}{dt}$	travail et chaleur échangés avec l'extérieur
2es pr	entropie	$\frac{DS}{Dt} = \frac{1}{T_s} \frac{\delta Q_{ext}}{dt} + \frac{\delta S_c}{dt}$	échanges thermiques et irréversibilité.

• Effet thermodynamique de la viscosité : d'après le TEC et le premier principe :

$$DE_c = P_{int} dt = \delta W_{viscosité} < 0 \quad \text{et} \quad DE_c + DU = 0$$

$$\text{d'où} \quad DU = -\delta W_{viscosité} > 0 \quad \text{et} \quad \Delta S = S_c > 0 \quad (\text{2nd principe})$$

Les forces de viscosité convertissent de l'énergie cinétique macroscopique en énergie interne.

