RESONANCE MÉCANIQUE

Particule élastiquement liée soumise à une excitation sinusoïdale.

- Equation du mouvement : $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F\cos\omega t$ ou $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 A\cos\omega t$
avec raideur k, coefficient α de frottement fluide, pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$,
facteur de qualité $Q = \frac{m\omega_0}{\alpha}$, $A = \frac{F}{m\omega_0^2}$

- Régime transitoire : solution $x(t)$ de l'équation du mouvement du type : $x(t)$
$x(t) = x_1(t) + X\cos(\omega t + \phi)$; $x_1(t)$ correspond au régime libre de l'oscillation harmonique amorti (régime apériodique, critique ou pseudo-périodique selon le signe de $\Delta = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$)
- Régime sinusoïdal forcé : $x(t) = X\cos(\omega t + \phi)$ de même pulsation que la force excitatrice ; ce régime est atteint après extinction de $x_1(t)$ au bout d'un temps égal à quelques τ (temps de relaxation $\tau = \frac{Q}{\omega_0}$)

Résonance en élongation.

- Emploi de la notation complexe
$\underline{x} = \underline{X}e^{j\omega t}$ (amplitude complexe $\underline{X} = Xe^{j\phi}$)
l'équation du mouvement devient : $(\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0}{Q}\omega)\underline{X} = \omega_0^2 A$, soit en posant $u = \frac{\omega}{\omega_0}$

$$X = \frac{A}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}} \quad , \quad \tan\phi = -\frac{u}{Q(1-u^2)}$$

- Phénomène de résonance :
pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, l'amplitude passe par un maximum X_{max} de pulsation ω_{max} ou de résonance $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ $(\omega_r < \omega_0)$; pas de résonance pour $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Résonance en vitesse.

$$V(u) = \frac{V_{max}}{\sqrt{1 + Q^2\left(u - \frac{1}{u}\right)^2}}$$

$V = V_{max} = \frac{Q}{m\omega_0}F$ pour $\omega = \omega_0$ $\forall Q$.
résonance aiguë pour $Q >> 1$ (bande passante $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$)

Résonance en puissance.

La puissance moyenne de la force de frottement, d'expression $\langle \mathcal{P}_d \rangle = -\frac{\alpha}{2}V^2$, passe par un maximum pour $\omega = \omega_0$, $\forall Q$.

Bilan énergétique pour une période.

$\langle \mathcal{P}_d \rangle + \langle \mathcal{P}_e \rangle = 0$ (puissance $\mathcal{P}_e$ de la force excitatrice),
$\frac{\langle \mathcal{E}_m \rangle}{|W_d|} = \frac{Q}{2\pi}$ (Energie mécanique $\mathcal{E}_m$, travail W_d de la force de frottement).

Analogie électromécanique.

Résonance en charge $\leftrightarrow$ résonance en élongation.
Résonance en intensité $\leftrightarrow$ résonance en vitesse.

$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$ $\leftrightarrow$ $\underline{Z}_m = \frac{\underline{f_e}}{\underline{v}} = \alpha + j\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)$
impédance électrique cplx — impédance mécanique cplx.

THEOREME DU MOMENT CINÉTIQUE D'UN POINT MATÉRIEL.

Moment d'une force par rapport à un point O.

- Définition :

$\vec{\mathcal{M}_O} = \vec{OM} \wedge \vec{F}$ (force $\vec{F}$ appliquée au point M) Unité N.m ou $kg.m^2.s^{-2}$,
direction orthogonale au plan $(\vec{OM}, \vec{F})$, sens donné par la règle du trièdre direct
$\|\vec{\mathcal{M}_O}\| = OM\|\vec{F}\|.|\sin\alpha|$ (angle α entre $\vec{OM}$ et $\vec{F}$)

- Changement d'origine : $\vec{\mathcal{M}_{O'}} = \vec{\mathcal{M}_O} + \vec{O'O} \wedge \vec{F}$.

- Expression en coordonnées cartésiennes : $\vec{\mathcal{M}_O} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y f_z - z f_y \\ z f_x - x f_z \\ x f_y - y f_x \end{pmatrix}$

Moment d'une force par rapport à un axe Δ

$\mathcal{M}_\Delta = \vec{\mathcal{M}_O} \cdot \vec{u_\Delta}$ (projection de $\vec{\mathcal{M}_O}$ sur l'axe Δ).
$\mathcal{M}_\Delta = 0$ si le support $\vec{F}$ est parallèle à Δ.
$|\mathcal{M}_\Delta| = d\|\vec{f}\|$ si Δ est orthogonal au plan $(\vec{OM}, \vec{f})$, d étant le bras de levier (distance entre Δ et le support de $\vec{f}$).

Moment cinétique dans un référentiel $\mathcal{R}$.

$\vec{L_O} = \vec{OM} \wedge \vec{p} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$ ($\vec{p}$ est la quantité de mouvement) en $kg.m^2.s^{-1}$
$L_\Delta = \vec{L_O} \cdot \vec{u_\Delta}$ (projection de $\vec{L_O}$ sur l'axe Δ).

Théorème du moment cinétique en référentiel galiléen.

- Théorème en un point fixe : $\dfrac{d\vec{L_O}}{dt} = \vec{\mathcal{M}_O}$ (par rapport à $\mathcal{R}_G$).

- Théorème en projection sur un axe fixe : $\dfrac{dL_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_\Delta$ (axe fixe Δ, dans $\mathcal{R}_g$).

- Mouvement à force centrale

force de type $\vec{F} = F(r)\,\hat{r}$, moment cinétique $\vec{L_O}$ constant, mouvement plan.

- Mouvement pendulaire :

le moment de la tension est nul et l'équation du mouvement s'obtient par application du théorème du moment cinétique : $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$ (longueur ℓ du pendule simple, faibles oscillations).

MOUVEMENTS DANS UN CHAMP NEWTONIEN DE FORCES CENTRALES.

Champ de forces centrales.

- Force centrale : $\vec{F} = F(r)\,\hat{r}$ (force qui passe constamment par le point fixe O tq. $\vec{OM} = r\,\hat{r}$)
- Intéraction newtonienne : $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\,\hat{r}$, gravitationnelle ($k = Gm_1m$) ou électrostatique ($k = -\frac{q_1q}{4\pi\varepsilon_0}$)

Fonction énergie potentielle.

- Définition : $d\mathcal{E}_p = -\vec{F}\cdot d\vec{OM}$
- Cas des forces centrales : $d\mathcal{E}_p = -F(r)\,dr$
- Intéraction newtonienne : $\mathcal{E}_p = -\frac{k}{r}$

Mouvement à force centrale

- Conservation du moment cinétique : $\vec{L_o} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = \vec{cst}$
- Mouvement plan défini par $\vec{r_0}$ et $\vec{v_0}$.

Loi des Aires : $r^2\dot{\theta} = cst = C$, $A = \frac{1}{2}Ct$ (l'aire balayée par $\vec{OM}$ est prop. au temps t)

Force centrale conservative.

- Conservation de l'énergie mécanique : $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = cst.$
- Energie potentielle effective : $\mathcal{E}_{peff} = \mathcal{E}_m - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + \mathcal{E}_p.$
- Domaine du mouvement radial :

valeurs de r telles que $\mathcal{E}_{peff}(r) \leq \mathcal{E}_m$,
état de diffusion si $r \geq r_m$.
état lié si $r_m \leq r \leq r_M$.

Planètes en mouvement elliptique

- Lois de Kepler :

1ère loi : dans le référentiel de Képler, le centre P d'une planète (masse m) du système solaire décrit une ellipse (demi-grand axe a, période T) dont le centre S du soleil (masse m_s) est l'un des foyers.

2e loi : pendant une durée Δt, l'aire $\mathcal{A}$ balayée par $\vec{SP}$ est proportionnelle à Δt : $\mathcal{A} = 0{,}5\,C.\Delta t$.

3e loi : le rapport T^2/a^3 est constant pour toutes les planètes du système solaire :
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_s}$$

- Energie mécanique : $\mathcal{E}_m = -\frac{Gm_s m}{2a}$.

Satellites terrestres

- Orbite circulaire

$$v = \sqrt{\frac{Gm_T}{r}} = \sqrt{\frac{g_0R^2}{r}}$$ (vitesse v, champ de pesanteur terrestre g_0 au niveau du sol, rayon R de la Terre, rayon r de l'orbite).

$$\mathcal{E}_m = -\frac{mg_0R^2}{2r} = \frac{\mathcal{E}_p}{2} = -\mathcal{E}_c$$

- Orbite elliptique → lois de Képler.
- Vitesse de libération : $v_\ell = \sqrt{2g_0R} = 11{,}2$ km.s^{-1} (vitesse qui permet au satellite d'échapper à l'attraction terrestre).

CHANGEMENT DE RÉFÉRENTIEL

Cinématique du changement de référentiel.

Soit un référentiel R_1 d'origine O_1 en mouvement par rapport à un référentiel R d'origine O supposé fixe.

- Mouvement absolu d'un point M : $\vec{v_a} = [\vec{v}(M)]_R$, $\vec{a_a} = [\vec{a}(M)]_R$.
- Mouvement relatif $\vec{v_r} = [\vec{v}(M)]_{R_1}$, $\vec{a_r} = [\vec{a}(M)]_{R_1}$
- Mouvement d'entraînement du point coïncidant M_c
  $\vec{v_e} = [\vec{v}(M_c)]_R$ $\vec{a_e} = [\vec{a}(M_c)]_R$ (point coïncidant M_c, confondu géométriquement avec M, et fixe par rapport à R_1.
- R_1 en translation par rapport à R:
  $\vec{v_e} = [\vec{v}(O_1)]_R$, $\vec{a_e} = [\vec{a}(O_1)]_R$, $\vec{v_a} = \vec{v_r} + \vec{v_e}$, $\vec{a_a} = \vec{a_r} + \vec{a_e}$
- R_1 en rotation autour de l'axe fixe Oz:
  $\vec{v_e} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$ (vitesse angulaire $\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{z}$ de R_1 par rapport à R)
  $\vec{a_e} = -\omega^2 \vec{HM}$ si $\omega = cst$ (projection H de M sur l'axe Oz)
  $\vec{a_c} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v_r}$ (accélération de Coriolis).
  $\vec{v_a} = \vec{v_r} + \vec{v_e}$ $\vec{a_a} = \vec{a_r} + \vec{a_e} + \vec{a_c}$.

Principe fondamental de la dynamique dans R_1 non galiléen.

- Force d'inertie d'entraînement :
  $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a_e}$ (pour un point M de masse m, mobile dans R_1 en mouvement par rapport à R)
- Force d'inertie de Coriolis :
  $\vec{f}_{ic} = -m\vec{a_c} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v_r}$: les forces d'inerties sont dues au caractère non galiléen de R_1.
  $m\vec{a_r} = \vec{F} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$

Théorème du moment cinétique dans R_1 non galiléen.

$$\left(\frac{d\vec{L}_{O_1}}{dt}\right)_{R_1} = \vec{\mathcal{M}}_{O_1}(\vec{F}) + \vec{\mathcal{M}}_{O_1}(\vec{f}_{ie}) + \vec{\mathcal{M}}_{O_1}(\vec{f}_{ic})$$

On peut remplacer le point O_1, origine de R_1, par un point fixe quelconque de R_1.

Equilibre relatif d'un point matériel dans R_1.

$$\vec{F} + \vec{f}_{ie} = \vec{0}, \quad \vec{\mathcal{M}}_{O_1}(\vec{F}) + \vec{\mathcal{M}}_{O_1}(\vec{f}_{ie}) = \vec{0}$$

Bilan énergétique dans R_1.

- Théorème de la puissance cinétique : $\left(\frac{d\mathcal{E}_c}{dt}\right)_{R_1} = \mathcal{P}(\vec{F}) + \mathcal{P}(\vec{f}_{ie})$
- Théorème de l'énergie cinétique : $\Delta \mathcal{E}_c = W(\vec{F}) + W(\vec{f}_{ie})$
- Energie mécanique : $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_{pe}$ (énergies potentielles $\mathcal{E}_p$ et $\mathcal{E}_{pe}$ correspondant aux forces conservatives $\vec{F}$ et $\vec{f}_{ie}$)

$\mathcal{E}_m$ est une constante du mouvement en l'absence de frottements.

SYSTÈME DE DEUX POINTS MATÉRIELS

Grandeurs cinétiques d'un système (S) $[M_1(m_1), M_2(m_2)]$.

- Centre de masse G (ou centre d'inertie) :
  $$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OM_1} + m_2 \vec{OM_2}}{m_1+m_2} \quad ; \quad m_1 \vec{GM_1} + m_2 \vec{GM_2} = \vec{0}$$
- Résultante cinétique ou quantité de mouvement totale :
  $\vec{P} = m_1 \vec{v_1} + m_2 \vec{v_2} = m \vec{v_G}$ (masse totale $m = m_1 + m_2$)
- Moment cinétique – énergie cinétique :
  $\vec{L_O} = \vec{OM_1} \wedge m_1 \vec{v_1} + \vec{OM_2} \wedge m_2 \vec{v_2}$, $\quad \mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$.

Référentiel barycentrique R^* du système (S).

Le référentiel barycentrique (ou du centre de masse) R^* du système (S) est en translation de vitesse d'entraînement $\vec{v_G}$ par rapport au référentiel d'étude R.

Le centre de masse G est fixe dans R^*.

- Théorème de Kœnig du moment cinétique :
  $\vec{L_O} = \vec{L^*} + m \vec{OG} \wedge \vec{v_G}$ (moment barycentrique cinétique $\vec{L^*} = \vec{L_G^*}$)
- Théorème de Kœnig de l'énergie cinétique :
  $\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_c^* + \frac{1}{2} m v_G^2$ (énergie cinétique barycentrique $\mathcal{E}_c^*$).

Théorème du centre de masse (ou de la quantité de mouvement) dans R_G.

$$m \vec{a_G} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F_{ext}} \quad \text{(système (S) soumis à des forces extérieures } \vec{F_{ext}}\text{)}$$

Théorème du moment cinétique du système (S) dans R_G.

$$\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{O,ext} \text{ (O étant un point fixe de } R_G\text{) et } \frac{dL_{Oz}}{dt} = \mathcal{M}_{Oz,ext} \text{ (axe fixe Oz de } R_G\text{)}.$$

Energie du système (S).

- Travail élémentaire des forces extérieures :
  $\delta W_{int} = f_{M_1 \to M_2}\, dr$ (indépendant du référentiel d'étude).
- Théorème de l'energie cinétique dans R_G.
  $\Delta \mathcal{E}_c = W_{int} + W_{ext}$ (W_{int} non nul pour un système déformable).
- Energie mécanique :
  $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{p,int} + \mathcal{E}_{p,ext}$ (énergie potentielle $\mathcal{E}_{p,int}$ d'intéraction, $\mathcal{E}_{p,ext}$ des forces ext.)

Système isolé de deux points matériels $M_1(m_1)$ et $M_2(m_2)$.

- Conservation de la quantité de mouvement $\vec{P}$ dans le référentiel R_G.
- Caractère galiléen du référentiel barycentrique R^* du système (M_1, M_2).
- Conservation du moment cinétique et de l'énergie mécanique barycentriques dans R^*.

Mouvement barycentrique – réduction canonique.

Dans R^*, on remplace le système (M_1, M_2) par le mobile équivalent M, de masse réduite $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, de vecteur position $\vec{GM} = \vec{M_1M_2} = r\,\hat{r}$ qui est soumis à la force centrale conservative $\vec{F_{21}} = f(r)\,\hat{r}$.

- les trajectoires barycentriques de M_1 et M_2 sont homothétiques de la trajectoire du mobile réduit M (en mouvement plan).

CARACTERE GALILÉEN APPROCHÉ DU RÉFÉRENTIEL GÉOCENTRIQUE OU TERRESTRE

Les référentiels d'étude.

- Référentiels galiléens de base :

Référentiel de Copernic (origine au centre de masse du système solaire, axes dirigés vers trois étoiles fixes).
Référentiel de Kepler R_0 ou référentiel héliocentrique (origine au centre de masse du soleil) en translation par rapport au référentiel de Copernic.

- Référentiel géocentrique (origine au centre de la Terre) en translation elliptique par rapport à R_0.
- Référentiel terrestre local, lié au sol terrestre, en rotation autour de l'axe des pôles.

Système non isolé de deux points en interaction gravitationnelle.

- Dynamique en référentiel barycentrique R^*.

$m_2 \vec{a}_2{}^* = m_2 \vec{\mathcal{G}}_1(M_2) + \mu \left[\vec{\mathcal{G}}ext(M_2) - \vec{\mathcal{G}}ext(A_1) \right]$
(équation du mouvement du point matériel M_2 du système $[A_1(m_1), M_2(m_2)]$ de masse réduite μ, soumis à l'action d'un champ extérieur de gravitation.

- Terme différentiel ou terme de marée : $\vec{\delta} = \vec{\mathcal{G}}ext(M_2) - \vec{\mathcal{G}}ext(A_1)$
- Phénomène des marées océaniques (référentiels d'étude géocentrique).

$\vec{\delta}(M) = \vec{\mathcal{G}}_L(M) - \vec{\mathcal{G}}_L(O) + \vec{\mathcal{G}}_S(M) - \vec{\mathcal{G}}_S(O) = \vec{\delta}_L(M) + \vec{\delta}_S(M)$.
(point M de la surface terrestre soumis à la gravitation de la Lune et du Soleil).
$\| \vec{\delta}(M) \| \ll \| \vec{\mathcal{G}}_T(M) \|$, ce qui prouve le caractère galiléen approché du référentiel géocentrique.

Mécanique terrestre.

- Statique terrestre – champ de pesanteur $\vec{g}$.

$\vec{g} = \vec{P}/m = \vec{\mathcal{G}} + \omega^2 \vec{HM}$ (poids $\vec{P}$, vitesse angulaire ω de rotation, projection H du point M sur l'axe des pôles)
$\| \omega^2 \vec{HM} \| < \omega^2 R \ll \| \vec{\mathcal{G}} \|$, soit : $\vec{g} \simeq \vec{\mathcal{G}}$, ce qui prouve le caractère galiléen approché du référentiel terrestre R_T.

- Dynamique terrestre, force de Coriolis $\vec{F}_{ic}$:

Cas de la chute libre : $\| \vec{F}_{ic} \| = 2m \| \vec{\omega} \wedge \vec{v} \| \ll mg$.
faible déviation vers l'Est (caractère galiléen approché de R_T).