CINEMATIQUE

Référentiel.

Un référentiel est un repère d'espace-temps qui associe une échelle de temps à un repère spatial.

Expression usuelle du vecteur position

en coordonnées cartésiennes : $\vec{OM} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$

en coordonnées cylindriques : $\vec{OM} = \rho\hat{\rho} + \theta\hat{\theta} + z\hat{z}$.

en coordonnées sphériques : $\vec{OM} = r\hat{r} + \theta\hat{\theta} + \phi\hat{\phi}$.

Vecteur vitesse dans un référentiel R.

Porté par la tangente en M à la trajectoire.

en coordonnées cartésiennes : $\vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$.

en coordonnées cylindriques : $\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{z}$.

Vecteur accélération

mouvement accéléré si $\vec{a}\cdot\vec{v} > 0$ et retardé si $\vec{a}\cdot\vec{v} < 0$

en coordonnées cartésiennes : $\vec{a} = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}$.

en coordonnées cylindriques : $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{z}$

Quelques mouvements usuels.

Mouvement rectiligne uniforme : $x = v_0 t + x_0$.

Mouvement rectiligne uniformément accéléré (ou retardé) a_0 :

$a_0 = cst \iff v = a_0 t + v_0 \iff x = \frac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t + x_0$

avec $v^2 - v_0^2 = 2a_0(x - x_0)$.

Mouvement rectiligne sinusoïdal :

$a = -Kx$ et $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$

où x_m : amplitude

$\omega = \sqrt{K}$: pulsation $\iff \omega = 2\pi f$.

ϕ : phase à l'origine (initiale).

Mouvement circulaire :

$\vec{OM} = r\hat{r}$ $\quad \vec{v} = r\omega\hat{\theta}$ avec vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$

$\vec{a} = -r\omega^2\hat{r} + r\dot{\omega}\hat{\theta} = a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta}$.

MECANIQUE I.

DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL EN REFERENTIEL GALILÉEN.

Contrairement à la cinématique, la dynamique étudie les mouvements de systèmes en relation avec les causes (cad les forces) qui les induisent.

Quelques forces usuelles.

Poids $\vec{P} = m\vec{g}$

Force d'intéraction gravitationnelle : $\vec{f} = -G\,mm'\,\frac{\hat{u}}{r^2}$

Force de rappel d'un ressort : $\vec{f} = -k\,(l-l_0)\,\hat{u}$

Réaction d'un support : $\vec{R} = R_T\,\hat{T} + R_N\,\hat{N}$

Opposition au glissement : tant que $R_T \leq \mu_0 R_N$ (μ_0 : coefficient de frott statique).

Forces de frottement fluide : $\begin{cases} \text{vitesse faible} \Leftrightarrow \text{modèle linéaire} & \vec{f} = -\alpha\,\vec{v} \\ \text{vitesse élevée} \Leftrightarrow \text{modèle quadratique} & \vec{f} = -\beta\,\Sigma\,v^2\,\hat{u}. \end{cases}$

Lois de Newton

- 1ère loi : principe d'inertie : dans un référentiel dit galiléen (où cette loi s'applique) une particule est en translation rectiligne uniforme si elle est mécaniquement isolée.
  $\Sigma\vec{F} = \vec{0} \iff \vec{a} = \vec{0}$ et $\vec{v} = \vec{cst}$
- 2e loi : principe fondamental de la dynamique : dans un référentiel galiléen :
  $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$
- 3e loi : principe des intéractions réciproques : deux particules M_1 et M_2 exercent l'une sur l'autre une force colinéaire opposée $\vec{f}_{1\to 2} = -\vec{f}_{2\to 1}$

Comment étudier le mouvement d'un point matériel ?

- Définir le système et le référentiel galiléen d'étude.
- Effectuer un bilan des forces extérieures appliquées au système.
- Utiliser une base de projection adaptée (pour éliminer les inconnues au maximum)
- Intégrer les équa diff. en tenant compte des conditions initiales.

UN PEU DE MATHS

Equation différentielle linéaire du 1er ordre.

$$\boxed{a\frac{dx}{dt} + bx = c} \quad ①$$

solution de la forme $x(t) = x_1(t) + x_2$

où $x_1(t) = k\exp\left(-\frac{b}{a}t\right)$ solution de l'équa. diff. sans second membre, générale.

et x_2 solution particulière de l'équa diff ①

Conditions initiales $\Rightarrow$ $k = x_0 - \frac{c}{b}$

$x_2 = \frac{c}{b}$.

Solution : $\boxed{x(t) = \left(x_0 - \frac{c}{b}\right)e^{-\frac{b}{a}t} + \frac{c}{b}}$

Equation différentielle linéaire du 2nd ordre

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \gamma} \quad ②$$

solution de la forme $x(t) = x_1(t) + x_2$

où $x_1(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = C\cos(\omega t + \phi)$ solution générale de l'équa diff sans second membre

et x_2 solution particulière de l'équa diff ②.

Conditions initiales $\Rightarrow$ C dépend de $x(0)$ et $\dot{x}(0)$

$x_2 = \frac{\gamma}{\omega^2}$

Solution : $\boxed{x(t) = C\cos(\omega t + \phi) + \frac{\gamma}{\omega^2}}$

MECANIQUE I.

TRAVAIL ENERGIE.

Puissance d'une force $\vec{F}$

$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ (en Watt W)

Travail.

- Travail élémentaire : $\delta W = \vec{F} \cdot \vec{dl} = \vec{F} \cdot d\vec{OM}$ ou $\delta W = \mathcal{P} dt$ (en Joule J).
- Travail le long d'une courbe (M_1, M_2) : $W = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} \, dt$.
- Travail du poids : $W = m\vec{g} \, \overrightarrow{M_1M_2} = mg(z_1 - z_2) = mgh$ (indépendant du chemin).
- Pour une force de frottement, le travail dépend du chemin suivi.

Energie cinétique - Puissance cinétique.

$E_c = \frac{1}{2} m v^2$ • Théorème de la puissance cinétique : $\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}$

Donc $\vec{f} \perp \vec{v} \Rightarrow E_c = cst$

- Théorème de l'énergie cinétique : $\Delta E_c = W(\vec{F})$ travail des forces extérieures.

Energies potentielles d'un champ de force.

- Définition : $dE_p = -\delta W$ (E_p en Joule J)
- Signification physique : $\Delta E_p = W_{op} = -W$
- Energie potentielle de pesanteur : $E_p = mgz + cst$ (En général $E_p = 0$ pour $z = 0$)
- Energie potentielle élastique : $E_p = \frac{1}{2} k x^2$.

Equilibre d'un point matériel.

La position x_e est un équilibre si $\vec{F}(x_e) = -\frac{dE_p}{dx} = 0$.

STABLE si $\frac{d^2E_p}{dx^2} > 0$ INSTABLE si : $\frac{d^2E_p}{dx^2} < 0$.

Energie mécanique.

$E_m = E_c + E_p$.

Conservation de E_m en l'absence de forces dissipatives.

Diminution de E_m en présence de forces de frottement $dE_m = \delta W_d < 0$

Domaine spatial d'un mvmt unidimensionnel : $E_p(x) < E_m$.

(point matériel ds un champ de forces conservatives).

MECANIQUE I

OSCILLATEURS - ESPACE DES PHASES.

Oscillateur harmonique unidimentionnel non amorti.

- Equation de mouvement du type $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. ($\omega_0$: pulsation propre)
- Solution sinusoïdale pure : $x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \phi_0)$
- Système conservatif $\Rightarrow$ E_m constante.

Oscillateur harmonique amorti

- Action d'une force de frottement (dissipative) $f_d = -\alpha \dot{x}$ de puissance $\mathcal{P}_d = -\alpha \dot{x}^2$
- Equation de mouvement du type :

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

(λ : coefficient d'amortissement) $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ — (Q : facteur de qualité) $Q = \frac{1}{2}\frac{\omega_0}{\lambda}$

- $\lambda > \omega_0$: régime apériodique ($Q < \frac{1}{2}$)
  $x(t) = \exp(-\lambda t)\left[A\exp(\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\, t) + B\exp(-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\, t)\right]$
- $\lambda = \omega_0$: régime critique.
  $x(t) = (At + B)\exp(-\omega_0 t)$
- $\lambda < \omega_0$: régime pseudo-périodique.
  $x(t) = A\exp(-\lambda t)\cos(\Omega t + \phi)$

pseudo-pulsation : $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$
pseudo-période : $T = 2\pi/\Omega$
décrément logarithmique : $\delta = \lambda T = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)}$

Espace des phases

- Il correspond à l'ensemble des trajectoires de phases d'un point $P(x, \dot{x})$
- les trajectoires isoénergétiques ($E_m = cst$) sont les trajectoires de phase d'un système conservatif : courbes fermées pour les oscillations périodiques, courbes ouvertes pour un mouvement révolutif.
- la réversibilité de l'évolution d'un système se traduit par une symétrie du portrait de phase par rapport aux abscisses, symétrie qui disparaît en présence de phénomène dissipatifs. (trajectoires de phases ouvertes et retour progressif vers l'état d'équilibre stable).

UN PEU DE MATHS.

Equation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

$$\boxed{\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0} \quad (1)$$

solution générale : $x(t) = \alpha\, x_1(t) + \beta\, x_2(t)$

On cherche x_1 et x_2 sous la forme exponentielle $x = Ae^{rt}$ avec A et r constantes à déterminer.

(1) peut s'écrire : $\underbrace{Ae^{rt}(r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2)}_{\text{équation caractéristique de (1)}} = 0$

On détermine les r suivant le signe du discriminant réduit : $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$