CHARGE ELECTRIQUE - CHAMP ELECTROSTATIQUE

La charge électrique est quantifiée à l'échelle microscopique ($q = \pm ne$, avec $e = 1{,}6.10^{-19}$ C) mais continue à l'échelle macroscopique (tout corps chargé peut être décomposé en éléments mésoscopique de charge $dq_M = \rho_M d\tau_M$ avec ρ_M densité volumique locale de charges).
La charge totale d'un système est conservative et indépendante du repère d'étude.

Loi de Coulomb

Force exercée par deux charges ponctuelles q_1 et q_2 à la distance r l'une de l'autre :

$$\vec{f}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\,\hat{u} = -\vec{f}_{21} \qquad \text{avec } \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9 \ mF^{-1}$$

ε_0 permitivité absolue du vide, remplacé par $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$ dans un milieu diélectrique.

Champ électrostatique : défini par son action

- Champ créé par une charge ponctuelle q_1 : $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\,\hat{u}$
- Action d'un champ sur une charge ponctuelle q_2 : $\vec{F} = q_2\vec{E}$
- Principe de superposition pour une distribution quelconque de charges (somme vectorielle) :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\,\hat{u}_i \quad \text{(discontinue)} \qquad ; \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\,\hat{u} \quad \text{(continue)}$$

$$\begin{cases} \text{linéique : } dq = \lambda\, dl \\ \text{surfacique : } dq = \sigma\, dS \\ \text{volumique : } dq = \rho\, d\tau \end{cases}$$

Topographie

Des logiciels de simulation fournissent des cartes de champ. Les lignes de champ ne se referment pas sur elles-même. $\vec{E}$ diverge à partir d'une source $q>0$ et converge vers une source $q<0$.

Propriétés de symétrie et d'invariance

Un champ électrostatique possède les propriétés d'invariance et de symétrie de la distribution de charges qui le crée :

- symétrie plane : $\rho(M') = \rho(M)$ avec $M' = sym_\pi(M)$
alors le champ $\vec{E}$ créé en un point M du plan de symétrie π (plan miroir) appartient à ce plan.
- antisymétrie plane : $\rho(M') = -\rho(M)$ avec $M' = sym_{\pi'}(M)$
alors le champ $\vec{E}$ créé en un point du plan d'anti-symétrie π' (plan antimiroir) est perpendiculaire à ce plan.
- axe de symétrie : $\vec{E}$ en un point de l'axe est colinéaire à l'axe de symétrie.
- Symétrie cylindrique ($\rho(r,\theta,z) = \rho(r)$) ou sphérique ($\rho(r,\theta,\phi) = \rho(r)$) :
champ radial : $\vec{E}(r) = E(r)\,\hat{r}$.

POTENTIEL ELECTROSTATIQUE - ENERGIE POTENTIELLE

La circulation du vecteur champ électrique le long d'une courbe Γ s'exprime par :

$$\mathscr{C}_A^B = \int_{A(\Gamma)}^B \vec{E}\cdot\vec{d\ell} = V_A - V_B \quad \text{et} \quad \mathscr{C}_A^A = \oint_\Gamma \vec{E}\cdot\vec{d\ell} = 0.$$

Le potentiel électrostatique au point M est une fonction d'état scalaire connue, à une cst près :

- Créé par une charge ponctuelle : $V(r) = \dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$
- Distribution discontinue : $V(M) = \sum_i V_i = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \dfrac{q_i}{r_i}$
- Distribution continue : $V(M) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \dfrac{dq}{r}$ avec dq linéique, surfacique ...

Le potentiel dérive du champ électrostatique :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \iff dV = -\vec{E}\cdot\vec{d\ell}$$

Topographie : les lignes de champ sont normales aux surfaces équipotentielles ($V = cst$).
Le champ est orienté dans le sens des potentiels décroissants.

Le travail d'une force électrostatique est indépendant du chemin suivi.
Déplacement d'une charge q de A à B dans un champ $\vec{E}$ extérieur :

$$W_{A\to B} = q(V_A - V_B) = -\Delta\mathscr{E}_{p\,(A\to B)}$$

L'énergie potentielle électrostatique

- Cas d'une charge q dans un champ $\vec{E}$: $\mathscr{E}_p = qV$.

Elle correspond au travail que doit fournir l'opérateur pour construire le système de façon réversible :

$$W_{op} = -W_{el\,(\infty\to M)} = -q(V_\infty - V_M) = qV = \mathscr{E}_p.$$

- Distribution quelconque

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \iff \vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\mathscr{E}_p.$$

Toute force conservative dérive d'une énergie potentielle.

THEOREME DE GAUSS - CONDENSATEUR PLAN

Le flux du champ électrostatique $\vec{E}$ à travers une surface (S) orientée correspond à :
$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (\text{avec } d\vec{S} = +dS\, \hat{u}_{ext} \text{ en général})$$
Le flux du champ créé par une charge ponctuelle est :
$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{\hat{u} \cdot d\vec{S}}{r^2}$$

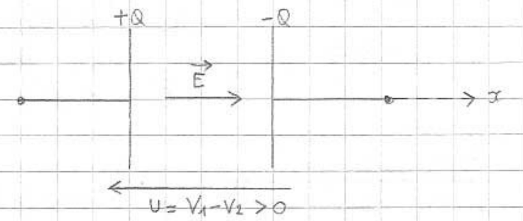
Théorème de Gauss
Le flux du champ créé par une distribution de charges quelconque à travers une surface fermée Σ (dite surface de Gauss) est égale à la somme des charges de la distribution intérieure à Σ, divisée par ε_0
$$\Phi = \frac{\Sigma\, q_{int}}{\varepsilon_0} \quad (\text{discontinu}) \qquad \Phi = \frac{\int dq}{\varepsilon_0} \quad (\text{continu}) \quad \text{avec } dq \ldots$$

Il résulte de ce théorème que :
- le flux est conservatif dans une région vide de charge ;
- le potentiel ne peut présenter d'extremum en dehors des charges.

Calculs de champs dans le cas d'une distribution à symétrie appropriée. Comment trouver $\vec{E}(M)$?
1) Analyse des invariances et des symétrie ;
2) Choix de la surface de Gauss (fermée, passant par M, telle que $\|\vec{E}(M)\|$ identique en tout point de Σ et $\vec{E}(M)$ selon la normale à Σ, soit une équipotentielle) ;
3) Appliquer le théorème de Gauss : $\Phi = E(M) \cdot \Sigma = \frac{Q_{INT}}{\varepsilon_0}$

Pour des équipotentielles non fermées, fermer Σ par des portions de surface tq. $\vec{E} \perp d\vec{S}_e$ (soit Φ_e nul)
- Résultat : continuité du potentiel et discontinuité du champ à la traversée de surfaces chargées ($\Delta\vec{E}_{1\to2} = \sigma/\varepsilon_0\, \vec{n}_{1\to2}$) ; continuité du champ et potentiel pour les distributions volumiques
- Remarque : l'application locale (petit volume) du théorème de Gauss permet de déduire une loi de distribution locale ou une composante locale du champ.

Condensateur plan
Un condensateur plan est un système assimilable à deux conducteurs plans infinis, parallèles, portant respectivement une charge $+Q = +\sigma S$ et $-Q = -\sigma S$ sur leurs faces (armatures) en regard.



Le champ est uniforme à l'intérieur : $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{x}$
La capacité correspond à $C = Q/U = \varepsilon_0 S/e$ (UNITÉ : Farad F)
L'énergie potentielle électrostatique électrostatique a pour expression :
$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2$$

Analogie électrostatique - gravitation
Les forces électrostatique et gravitationnelle sont deux forces newtoniennes. On a la correspondance :
$$q \leftrightarrow m \qquad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = k \leftrightarrow -G \qquad \vec{E} \leftrightarrow \vec{\mathcal{G}}.$$

On en déduit le théorème de Gauss de la gravitation :
$$\oiint_\Sigma \vec{\mathcal{G}} \cdot d\vec{S}_e = -4\pi G M_{INT}$$

Ainsi, pour un corps à symétrie sphérique, le champ de gravitation créé à $r \geq R$ est le même que celui produit par une masse ponctuelle de valeur la masse totale, placée au centre O du corps sphérique.

DIPÔLE ELECTROSTATIQUE

Un dipôle électrostatique correspond à un doublet de charges $-q(A)$ et $+q(B)$ séparées par une longueur $\ell = AB$ petite par rapport aux distances d'action r.
- Approximation dipolaire : $OM = r \gg \ell = AB$, O milieu de AB
- Moment dipolaire : $\vec{\mu} = q\vec{AB} = q\vec{\ell}$ (en C.m ou Debye)

Actions exercées par un dipôle.
- Potentiel créé en $M(r,\theta)$: $V(r,\theta) = \dfrac{q\ell\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{\vec{\mu}\cdot\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$
- Champ créé en $M(r,\theta)$: $\vec{E} = -\vec{grad}\, V$

$$E(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2\mu\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \quad \text{et} \quad E(\theta) = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{\mu\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Forme intrinsèque : $\vec{E}(M) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{(3\vec{\mu}\cdot\vec{r})\,\vec{r} - \vec{\mu}\,r^2}{r^5}$ avec $\vec{r} = \vec{OM}$

Actions sur un dipôle rigide
- Cas d'un champ uniforme $\vec{E_0}$:

$$\vec{F} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma} = \vec{\mu}\wedge\vec{E_0}$$

les actions mécaniques se réduisent à un couple de forces de moment $\vec{\Gamma}$ qui tend à aligner le dipôle dans la direction et le sens du champ.
- Cas d'un champ non uniforme $\vec{E} = E(x)\,\hat{x}$:

$$\vec{F} = q\,d\vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma} = \vec{\mu}\wedge\vec{E}.$$

Une fois que le couple a aligné le dipôle selon le champ local $(\vec{\mu} \parallel \vec{E})$, la force l'entraîne vers les champs forts :

$$\vec{F} = q\,d\vec{E} = \vec{\mu}\,\frac{dE}{dx}$$

- Energie potentielle du dipôle dans le champ $\vec{E}$:

$$\mathcal{E}_p = q(V_B - V_A) = -\vec{\mu}\cdot\vec{E}.$$

La résultante des forces dérive de cette énergie potentielle :

$$\vec{F} = -\vec{grad}\,\mathcal{E}_p = +\vec{grad}\,(\vec{\mu}\cdot\vec{E})$$

Applications en chimie
- Ion isolé assimilable à une charge ponctuelle (V en $\frac{1}{r}$).
- Molécule polaire ($\Sigma q_i = 0$ et $G_+ \neq G_-$) assimilable à un dipôle (V en $\frac{1}{r^2}$)

REMARQUE : si $\Sigma q_i = 0$ et $G_+ = G_-$ on obtient en quadripôle (V en $\frac{1}{r^3}$).

MOUVEMENT DES PARTICULES CHARGÉES DANS LES CHAMPS $\vec{E}$ ET $\vec{B}$ - MILIEUX CONDUCTEURS

Champ magnétique

Les sources du champ $\vec{B}$ sont les charges mobiles (courants, aimants).
La force magnétique exercée par $\vec{B}$ sur une charge mobile $(q, \vec{v})$ est :

$$\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

Force de Lorentz

L'action d'un couple $(\vec{E}, \vec{B})$ sur une charge mobile $(q, \vec{v})$ est :

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

La puissance de la force de Lorentz est : $\mathcal{P} = \vec{f} \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$

Action de $\vec{E}$ uniforme sur une particule (q, m)

- Energie potentielle électrique : $\mathcal{E}_p = qV$ (potentiel électrique V).
- Accélérateur linéaire : $v_1^2 = v_0^2 + \frac{2qU}{m}$ avec $qU = q(V_0 - V_1) > 0$.
- Action d'un condensateur plan $(\vec{E} \perp \vec{v_0})$: déflexion Y proportionnelle à $\frac{|q|}{m}$ et U (tension entre les armatures).

Action de $\vec{B}$ uniforme sur une particule mobile.

- Aspect énergétique : $\mathcal{P} = \vec{f} \cdot \vec{v} = 0$, $\mathcal{E}_c = \text{cst}$, $\|\vec{v}\| = \text{cst}$.
- Mouvement rectiligne uniforme pour $\vec{B} \parallel \vec{v_0}$
- Mouvement circulaire uniforme pour $\vec{B} \perp \vec{v_0}$, de rayon $R = \frac{mv_0}{|q|B}$, de période $T = \frac{2\pi m}{|q|B}$ indépendante de la vitesse (application au cyclotron).

Milieux conducteurs.

- Vecteur densité de courant : $\vec{j} = \sum_k n_k^* q_k \vec{v_k}$

où q_k est le porteur de charge, n_k^* est la densité volumique (m^{-3}) de charge, et $\vec{v_k}$ la vitesse d'ensemble.

- Loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ (conductivité σ) ou $\vec{E} = \rho \vec{j}$ (résistivité ρ)

Résistance électrique d'un conducteur filiforme : $R = \frac{\rho \ell}{S}$ (longueur ℓ, section constante S).

- Force de Laplace : $d\vec{F} = i\vec{d\ell} \wedge \vec{B} = \vec{j} \wedge \vec{B} \, d\tau$ (version linéique ou volumique)
- Tension de Hall : U_H proportionnelle au module d'un champ $\vec{B}$, agissant sur un mince ruban métallique traversé par un courant i (Effet Hall conduisant à la mesure d'un champ magnétique).

ELEMENT DE COURANT - CHAMP MAGNETOSTATIQUE

Distributions de courant

Un courant électrique est un mouvement d'ensemble ordonné de particules chargées.

- Intensité électrique à travers une section S : $I = \frac{dq}{dt}$

- Vecteur densité de courant : $\vec{j} = n^* q \vec{v}$ et $I = \iint_S \vec{j}\,\vec{dS}$

On distingue trois types de vecteurs élément de courant :

$$\vec{dC} = \underset{\text{(volumique)}}{\vec{j}\,d\tau} = \underset{\text{(surfacique)}}{\vec{j_s}\,dS} = \underset{\text{(linéique - filiforme)}}{I\,\vec{dl}}$$

Loi de Biot et Savart

Le champ élémentaire $\vec{dB}(M)$ créé au point M par l'élément de ~~de~~ courant $\vec{dC} = I\vec{dl}$ est :

$$\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\vec{dl} \wedge \hat{u}}{r^2} \quad (\text{perméabilité } \mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ H m^{-1})$$

$\vec{B}(M)$ s'obtient ainsi par intégration vectorielle en tenant compte des symétrie.
$\vec{B}(M)$ n'est pas défini sur les sources filiformes, et n'est pas continu (composante tangentielle) à la traversée d'une distribution surfacique.

Topographie et symétries

- Les lignes de champ magnétiques tournent autour des sources.
- Symétrie plane ($P' = sym_\pi P \iff \vec{dC}' = sym_\pi \vec{dC}$),

le champ magnétique $\vec{B}$ est orthogonal à un plan de symétrie en tout point de ce plan.
- Antisymétrie plane ($P' = sym_{\pi^*} P \iff \vec{dC}' = -sym_{\pi^*}\vec{dC}$),

le champ magnétique $\vec{B}$ en un point d'un plan d'antisymétrie appartient à ce plan.
- Symétrie cylindrique (invariance par translation et rotation)

$\vec{B} = B_\theta(r)\,\hat{\theta}$, cas d'un fil infini d'axe Oz.
- Axe de symétrie de révolution (en un point de l'axe).

$\vec{B} = B_z(z)\,\hat{z}$, cas d'une spire d'axe Oz.

Calculs de $\vec{B}$: exemples utiles

- Fil rectiligne infini : $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\theta}$

- Spire circulaire sur son axe : $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\alpha\,\hat{z}$.

- Solénoïde circulaire sur son axe : $\vec{B} = \frac{\mu_0 n I}{2}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)\,\hat{z}$.

Solénoïde infini ⇒ champ intérieur uniforme $\vec{B} = \mu_0 n I\,\hat{z}$.

CIRCULATION ET FLUX DU CHAMP MAGNETOSTATIQUE

La circulation $\mathcal{C}$ du champ $\vec{B}$, produit par une distribution de courants, le long d'un contour (C) orienté est : $\mathcal{C} = \int_C \vec{B}\cdot\vec{dl}$.

Théorème d'Ampère

Pour un contour fermé (C), la circulation de $\vec{B}$ est égale à la somme des intensités algébriques des courants enlacés par (C), multipliée par μ_0 :

- circuit filiforme : $\mathcal{C} = \oint_{(C)} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I_{enlacé} = \mu_0 \sum_k \varepsilon_k I_k$ ($\varepsilon_k = +1$ si I_k ds le sens de $\vec{n}$)
- distribution volumique : $\mathcal{C} = \oint_{(C)} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I_{enlacé} = \mu_0 \iint_{S_{INT}} \vec{j}\,\vec{dS}$

Le champ $\vec{B}$ a donc une circulation non conservative.

Calculs de champs $\vec{B}$

1) Analyse des invariances et des symétries.
2) Choix du contour fermé d'Ampère : ligne de champ passant par M, telle que $\vec{B} \parallel \vec{dl}$, et $\|\vec{B}\|$ conserve la même valeur.
3) Application du théorème d'Ampère :

$$\mathcal{C} = B \oint_{(C)} \|\vec{dl}\| = BL = \mu_0 I_{enlacé} \quad \text{d'où entire } \|\vec{B}\|$$

Si nécessaire, fermer le contour d'Ampère par des portions où $\vec{B} \perp \vec{dl}$ (circulation nulle).

- Exemples :
  - fil rectiligne infini : $2\pi r\, B(r) = \mu_0 I$
  - solénoïde infini : $B_{INT} = \mu_0 n I$ (champ intérieur uniforme)

Le flux du champ magnétique $\vec{B}$ à travers une surface orientée correspond à :

$$\phi = \iint_S \vec{B}\cdot\vec{dS} \quad (\text{UNITÉ : Weber } Wb = T.m^2)$$

Le champ magnétique $\vec{B}$ est à flux conservatif, c'est-à-dire qu'un tube de champ transporte un flux constant :

$$\oiint_\Sigma \vec{B}\cdot d\vec{S_e} = 0$$

Cette propriété peut être exploitée localement pour déduire la composante radiale d'une distribution à symétrie de révolution, si on connaît la composante axiale.

Conclusion : $\vec{E}$ est un vecteur VRAI, $\vec{B}$ est un pseudo-vecteur.

$\vec{E}$ { circulation conservative ; flux non conservatif (théorème de Gauss)

$\vec{B}$ { circulation non conservative (théorème d'Ampère) ; flux conservatif.

DIPÔLE MAGNÉTIQUE

Soit une spire circulaire de rayon R, parcourue par un courant d'intensité I (le sens de I permet d'orienter la spire et de définir la normale).

Le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ est le pseudo-vecteur : $\vec{\mathcal{M}} = IS\vec{n} = \pi R^2 I \vec{n}$

Si l'on décompose une distribution de courants finie en boucles de courant :

$$\vec{\mathcal{M}} = \int_{\mathcal{D}} d\vec{\mathcal{M}}.$$

Approximation du dipôle magnétique

On assimile à un dipôle magnétique (modélisé par une boucle de courant) toute distribution de courants stationnaires de dimensions faibles par rapport aux distances d'action et de $\vec{\mathcal{M}} \neq \vec{0}$.

Champ créé par un dipôle magnétique (placé en O) au point $M(r, \theta)$

Par analogie au dipôle électrostatique :

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \Leftrightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} \qquad \vec{p} \Leftrightarrow \vec{\mathcal{M}} \qquad \vec{E} \Leftrightarrow \vec{B}$$

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mathcal{M}\cos\theta}{r^3} \quad \text{et} \quad B(\theta) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathcal{M}\sin\theta}{r^3}$$

Forme intrinsèque : $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(\frac{3\vec{\mathcal{M}}\cdot\vec{r}}{r^2}\vec{r} - \vec{\mathcal{M}}\right)$ avec $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

Exemples : aimant, Terre...

Topographie identique à celle du dipôle électrostatique.

Actions d'un champ extérieur $\vec{B}_{ext}$ sur un dipôle magnétique

- Cas de $\vec{B}$ uniforme : l'action se réduit à un couple qui tend à aligner $\vec{\mathcal{M}}$ selon $\vec{B}$.

$$\vec{F} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$

- Energie potentielle d'intéraction magnétique :

$$\mathcal{E}_p = -\vec{\mathcal{M}}\cdot\vec{B}.$$