RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ D'UN CIRCUIT R, L, C - RÉSONANCE

Passage du régime transitoire au régime sinusoïdal forcé

- Equation intégro-différentielle d'un circuit R,L,C série : (durée du régime trans. : qlq $\tau = \frac{L}{R} \ll 1\,s$)

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = U_m \cos \omega t$$

- Régime sinusoïdal forcé : $I(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$ (amplitude I_m, déphasage ϕ entre I et U)

Représentation complexe des grandeurs sinusoïdales

- Notation cplx : $u(t) = U_m \cos(\omega t) \iff \underline{u} = U_m e^{j\omega t}$
  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) \iff \underline{i} = \underline{I}_m e^{j\omega t}$ avec $\underline{I}_m = I_m e^{j\phi}$ (amplitude cplx).
- Dérivée et primitive en notation complexe.
  $\frac{d\underline{i}}{dt} = j\omega \underline{i}$ et $\int \underline{i}\,dt = \frac{1}{j\omega}\underline{i}$ Dériver $\iff \times j\omega$; Intégrer $\iff \div j\omega$
- Représentation vectorielle dans le plan complexe : diagramme de Fresnel.

Dipôles linéaires en notation complexe

	cas général	résistor	bobine	condensateur	circuit R,L,C...
Impédance complexe	$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{U_m}{I_m}e^{-j\phi}$	$\underline{Z}_R = R$	$\underline{Z}_L = j\omega L$	$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$	série : $\underline{Z}_{eq} = \sum_i \underline{Z}_i$
Admittance complexe	$\underline{Y} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{I_m}{U_m}e^{j\phi}$	$\underline{Y}_R = \frac{1}{R}$	$\underline{Y}_L = \frac{1}{j\omega L}$	$\underline{Y}_C = j\omega C$	para : $\underline{Y}_{eq} = \sum_i \underline{Y}_i$

- Source de tension ou de courant en notation cplx : générateur de Thévenin (f.é.m $\underline{e}$, impéd. $\underline{Z}$ en série) ou générateur de Norton (c.é.m. $\underline{\eta} = \frac{\underline{e}}{\underline{Z}} = \underline{Y}\,\underline{e}$, impéd. $\underline{Z}$ en //)

Circuits linéaires en régime sinusoïdal forcé

- Lois de Kirchhoff en notation cplx :
  loi des noeuds : $\sum_k \varepsilon_k \underline{i}_k = 0$ et loi des mailles : $\sum_k \varepsilon_k \underline{u}_k = 0$.
- Loi de Pouillet (relative à une maille) : $\underline{i} = \frac{\sum_k \varepsilon_k \underline{e}_k}{\sum_k \underline{Z}_k}$ ($\varepsilon_k = +1$ pour $\underline{e}_k$ sens de $\underline{i}$)
- Diviseur de tension : $\underline{u}' = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{u}$ (tension $\underline{u}$ aux bornes de $\underline{Z}_2$).
- Diviseur de courant : $\underline{i}_k = \frac{\underline{Y}_k}{\sum_k \underline{Y}_k}\underline{\eta}$ ($\underline{i}_k$ circulant dans $\underline{Z}_k$).
- Théorème de Millman : $\underline{u}_N = \frac{\sum_k \underline{Y}_k \underline{u}_k + \sum_j \varepsilon_j \underline{\eta}_j}{\sum_k \underline{Y}_k}$ ($\varepsilon_j = +1$ pour $\underline{\eta}_j$ orienté vers le noeud N)
- Méthode de superposition des états : le courant cplx circulant dans une branche est la somme des courants complexes produits par chaque source libre de tension ou de courant supposée seule.

Résonance d'un circuit R,L,C série.

- Résonance en intensité
  $\omega_r = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\phi(\omega_r) = 0$, $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$ (bande passante).
- Résonance en tension aux bornes du condensateur :
  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$: $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$, phénomène de surtension si $Q \gg 1$.
  $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$: absence de résonance.

PUISSANCE EN REGIME SINUSOÏDAL.

Puissance instantanée d'un dipôle.

$p(t) = u(t)\,i(t)$; dipôle récepteur si $p>0$, générateur si $p<0$.

Puissance moyenne

- Définition : $$\mathcal{P} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt$$

- Intensité efficace : c'est l'intensité d'un courant CONTINU qui produirait le même effet Joule qu'en régime périodique, dans un résistor :

$$I_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt$$. Pour un courant sinusoïdal $I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$

- Puissance moyenne d'un dipôle en régime sinusoïdal :

$\mathcal{P} = U_{eff}\,I_{eff}\cos\phi$ où $\cos\phi$ est le facteur de puissance (ϕ déphasage entre $u(t)$ et $i(t)$)

Elle vaut $R\,I_{eff}^2$ pour un résistor, 0 pour un condensateur et une bobine.

- Puissance moyenne d'un groupement R, L, C série : $$\mathcal{P} = \frac{\mathcal{P}_{max}}{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}$$

avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $\mathcal{P}_{max} = \frac{U_{eff}^2}{R}$

$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$ (facteur de qualité).

$\mathcal{P} = \mathcal{P}_{max}$ pour $\omega = \omega_0$ (résonance en puissance) et $\frac{\mathcal{P}_{max}}{2} \leq \mathcal{P} \leq \mathcal{P}_{max}$ dans la bande passante.

Puissance complexe.

$\underline{P} = \frac{1}{2}\,\underline{u}\,\underline{i}^*$ (en V.A.) $\underline{P} = \mathcal{P} + i\,\mathcal{Q}$ avec $\mathcal{P}$ puissance active (moyenne) (W)
$\mathcal{Q}$ puissance réactive (var)

Facteur de puissance $\cos\phi$.

L'augmentation du facteur de puissance d'une installation permet d'améliorer le rendement de transfert de puissance électrique (par exemple, en connectant un condensateur en parallèle avec la charge).

Adaptation d'impédances.

Un générateur de tension, d'impédance interne $\underline{Z}_g$, fournit une puissance maximale à un dipôle d'impédance $\underline{Z}$ lorsque $\underline{Z} = \underline{Z}_g^*$.

AMPLIFICATEUR OPÉRATIONNEL EN RÉGIME LINÉAIRE.

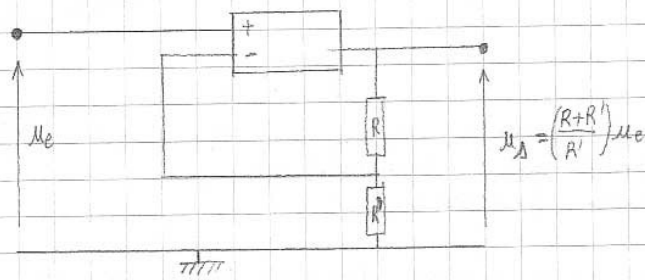
AO réel, AO idéal.

Un amplificateur opérationnel (AO) comporte diverses bornes d'accès : deux bornes d'entrées (E^+, E^-), une borne de sortie (S), deux bornes connectées à des sources d'alimentation.

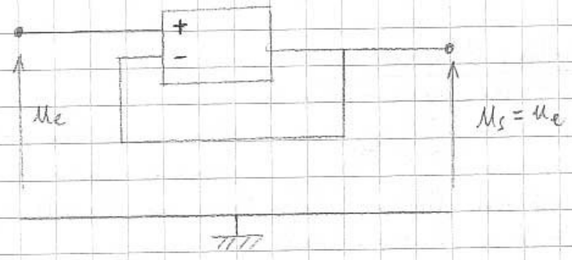
- AO en régime linéaire :
  $u_s = \mu(u^+ - u^-) = \mu\varepsilon$ avec $\mu \gg 1$ coefficient d'amplification.
- limitations de la tension de sortie :
  Saturation haute : $u_s = V_{sat}$
  Saturation basse : $u_s = -V_{sat}$
- AO idéal ($\mu \to \infty$) :
  courants nuls en entrée : $i^+ = i^- = 0$.
  Régime linéaire caractérisé par $\varepsilon = 0$ ou $u^+ = u^-$.

Montages usuels à AO idéal en régime linéaire.

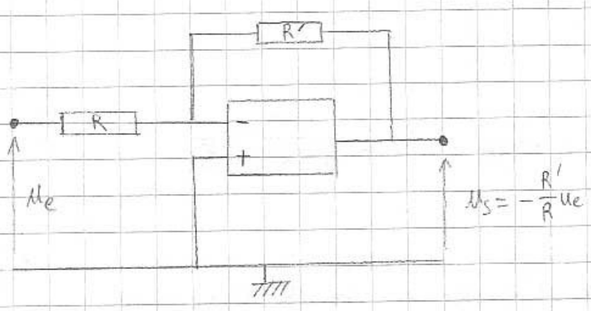
Amplificateur non inverseur de tension.



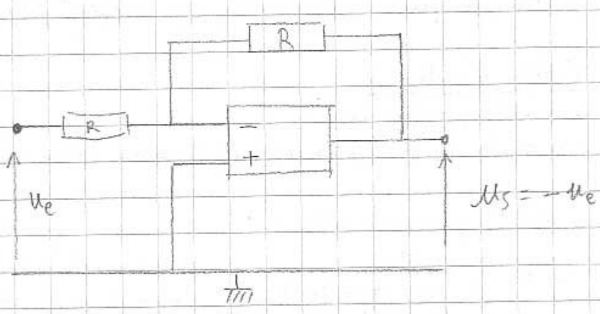
Suiveur.



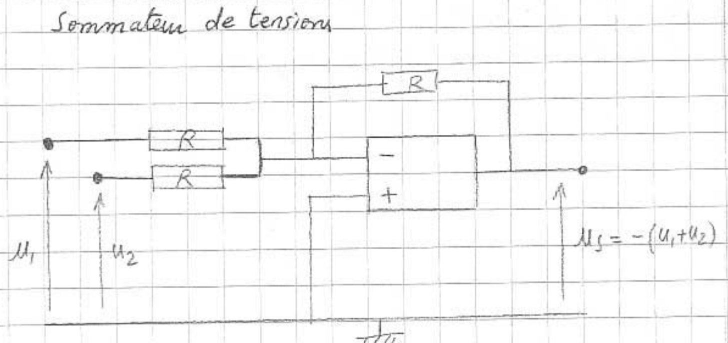
Amplificateur inverseur



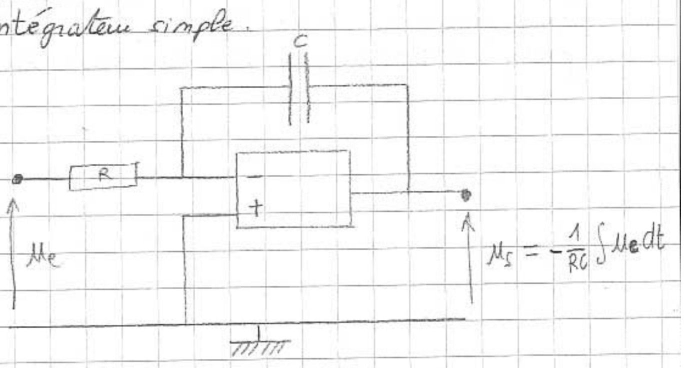
Changeur de signe



Sommateur de tensions



Intégrateur simple.



FILTRES PASSIFS OU ACTIFS

Filtre linéaire en régime sinusoïdal

- Fonction de transfert
  $\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = G e^{j\phi}$ (gain G, déphasage ϕ de u_s par rapport à u_e)
- Stabilité
  $\underline{H} = \frac{N(p)}{D(p)}$, polynômes N et D de degrés m et n (variable $p = j\omega$).
  Le filtre linéaire est stable pour $m \leq n$, n étant l'ordre du filtre.
- Nature du filtre :
  filtre passe-bas pour $G(0) \neq 0$ et $G(\infty) = 0$
  filtre passe-haut pour $G(0) = 0$ et $G(\infty) \neq 0$.
  filtre passe-bande pour $G(0) = G(\infty) = 0$ et $G(\omega_0) = G_{max}$.
- Filtre passif (composants R, L, C) ou filtre actif (circuit à AO en régime linéaire).

Diagramme de Bode.

- Réponse en gain : $G_{dB} = 20 \log G$ en fonction de $\log \omega$
- Réponse en phase : ϕ en fonction de $\log \omega$.
- Diagramme asymptotique : formes limites de $G_{dB}(\log\omega)$ et $\phi(\log \omega)$ lorsque $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$

Filtres d'ordre 1.

- Filtre passe-bas :
  $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$ $G_{max} = G(0) = |H_0|$, pulsation de coupure ω_c tq. $G(\omega_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$
  bande passante définie par $0 < \omega \leq \omega_c$

C'est un filtre intégrateur en hautes-fréquences ($\omega \gg \omega_c$).

- Filtre passe-haut :
  $\underline{H} = H_\infty \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$, $G_{max} = G(\infty) = |H_\infty|$, $\omega_c \leq \omega < \infty$ dans la bande passante.

C'est un filtre dérivateur en basses-fréquences ($\omega \ll \omega_c$)

Filtres d'ordre 2

- Filtre passe-bas :
  exemple de la résonance en tension d'un circuit R, L, C série : $\underline{H} = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$
- Filtre passe-bande :
  $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$, facteur de qualité $Q = \frac{L\omega_0}{R}$, pulsation de résonance $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
  $H_0 = 1$ dans le cas de la résonance en intensité d'un circuit R, L, C série.
  $G_{max} = G(\omega_0) = |H_0|$, déphasage nul à la résonance.

Bande passante $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ (filtre très sélectif si $Q \gg 1$)
pentes ± 20 dB par décade pour les asymptotes du graphe $G_{dB}(\log \omega)$.